MÓDULO II

INTEGRALES Y ECUACIONES DIFERENCIALES

SIMPLE ECONOMÍA
IMPULSANDO SUEÑOS

MÓDULO II: INTEGRALES y ECUACIONES DIFERENCIALES

II.1 INTEGRAL DE UNA FUNCIÓN, PRIMITIVA O ANTIDERIVADA

La <u>antiderivada o primitiva</u> de la función y = f(x) es una función que simbolizaremos F(x), que verifica:

F´(x) = f(x)

<u>La integral I(x)</u> representa un *conjunto de funciones de la cual cada miembro tiene una derivada igual a f(x),* es decir:

I (x) = F(x) + C ⟺ I´(x) = F´(x) = f(x)

Su notación es:

$$\mathrm{I(x)} = \int f(x)dx = F(x) + C$$

Donde:

$f(x)$ es la *función del integrando.*
dx es el *diferencial de la variable x.*
$F(x) + C$ son las *primitivas.*
C es la *constante de integración.*

II.2 INTEGRALES INDEFNIDAS E INTEGRALES DEFINIDAS

	Integrales indefinidas	*Integrales definidas*
Notación	$\mathrm{I(x)} = \int f(x)dx = F(x) + C$	$\mathrm{I(x)} = \int_a^b f(x)dx$
Concepto	La integral indefinida de una función f (x) es una nueva función de la forma I (x) = F (x) + C ***definida en el dominio de números reales*** para la cual se cumple que: $\mathrm{I´(x) = f(x)}\ \forall\, x\ \in D_f : R$ Las integrales indefinidas ***son una familia de funciones primitivas***. Donde cada primitiva difiere en una constante de integración C.	La integral definida está referida a un ***intervalo de definición [a, b].*** Nos permite hallar una superficie gráfica en el plano, es decir, un ***área comprendida entre la función y el eje de las abscisas***, limitada por los extremos del intervalo [a, b] *<u>Riemann</u>* *Si f(x) es una función continua para un intervalo [a, b],* la integral definida de dicha función es igual al ***límite de la suma de Riemann si dicho límite existe, para cuando la variación de la variable independiente en cada subintervalo tiende a cero:*** $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i).\Delta x_i$

<table>
<tr>
<td>Propiedades
k_1 y k_2 son números reales, mientras que $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son continuas para el conjunto de números reales.</td>
<td>1. La <u>integral de una constante por una función</u> es igual al producto de la constante por la integral de la función:
$$\int k_i\, f_i(x)dx = k_i \int f(x)dx$$
<u>2. La integral de una suma de funciones</u> es igual a la suma de las integrales:
$$\int [f_1(x) + f_2(x)]\, dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$$</td>
<td>1. La <u>integral de una constante por una función</u> es igual al producto de la constante por la integral de la función:
$$\int_a^b k_i\, f_i(x)dx = k_i \int_a^b f_i(x)dx$$
<u>2. La integral de una suma de funciones</u> es igual a la suma de las integrales:
$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$$
3. La superficie es nula si los límites de integración son iguales:
$$\int_a^a f(x)dx = 0$$
4. Cambia de signo si se intercambian los límites de integración:
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$
5. Se puede presentar como suma de dos superficies, para un c que pertenece a [a, b]:
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$</td>
</tr>
<tr>
<td>Método de resolución</td>
<td>Tenemos los siguientes <u>métodos de integración:</u>
1. Integración por tabla inmediata.
2. Integración por descomposición.
3. Integración por sustitución.
4. Integración por partes.</td>
<td>Tenemos los siguientes <u>métodos de integración:</u>
1. Integración por tabla inmediata.
2. Integración por descomposición.
3. Integración por sustitución.
4. Integración por partes</td>
</tr>
</table>

II.3 INTEGRALES DEFINIDAS: REGLA DE BARROW

La <u>regla de Barrow</u> nos indica *cómo podemos calcular una integral definida a partir de la primitiva*. Si *f(x) es una función continua e integrable en el intervalo [a, b],* se verifica ***que la integral es igual a la primitiva valuada en el extremo superior menos la primitiva valuada en el extremo inferior de integración:***

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\,|_a^b = F(b) - F(a)$$

II.4 MÉTODOS DE RESOLUCIÓN

	Integrales indefinidas	*Integrales definidas*
Integración por *tabla inmediata.*	*Este método consiste en la aplicación directa de la* ***tabla de Integrales.***	*Este método consiste en la aplicación directa de la* ***tabla de Integrales.***
Integración por *descomposición.*	Consiste en identificar si en la función del integrando hay una suma algebraica de varias funciones. Si es este el caso, l***a integral de la suma algebraica de un número finito de funciones. Es igual a la suma algebraica de las integrales indefinidas de cada una de las funciones dadas.*** $\int [f_1(x) + f_2(x) + .. + f_n(x)]\, dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \cdots + \int f_n(x)dx$	Consiste en identificar si en la función del integrando hay una suma algebraica de varias funciones. Si es este el caso, l***a integral de la suma algebraica de un número finito de funciones. Es igual a la suma algebraica de las integrales definidas de cada una de las funciones dadas.*** $\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + \ldots + \int_a^b f_n(x)dx$
Integración por *sustitución.*	El procedimiento implica una ***sustitución de la función del integrando por una nueva función*** y la posterior resolución por medio de la tabla inmediata de integrales. Aquí se requiere realizar la <u>sustitución de variables</u>.	El procedimiento implica una ***sustitución de la función del integrando por una nueva función*** y la posterior resolución por medio de la tabla inmediata de integrales. Aquí se requiere realizar la <u>sustitución de variables</u>. *Es muy importante considerar que cuando la integral definida para el intervalo [a, b] los límites de integración son "a" y "b" respectivamente. Pero, al realizar una sustitución de la variable x, por una nueva variable u(x), deben hallarse los nuevos límites de integración.*
Integración ***por partes.***	Se aplica cuando en el integrando se **presenta un producto de dos funciones algebraicas o trascendentes.** Sean *dos funciones continuas y derivables u (x) y v(x) , de la variable independiente "x".* <u>Se aplica la siguiente fórmula:</u> $\boxed{\int u\,.dv = u\,.v - \int v\,.du}$	Sean *dos funciones continuas y derivables u (x) y v(x), de la variable independiente "x".* <u>Se aplica la siguiente fórmula</u>: $\boxed{u\,.v\,\vert_a^b - \int_a^b v\,.du}$

II.5 ECUACIONES DIFERENCIALES

Se denomina Ecuación diferencial a toda igualdad en la que aparezcan:

- Una o más ***variables***.
- Una o más ***funciones de esas variables***.
- Algunas ***derivadas o diferenciales de dichas funciones.***

Ecuación diferencial ordinaria

Se denomina Ecuación diferencial ordinaria a toda igualdad en la que aparezcan:

- ***Una única variable*** "x".
- ***Una única función*** "y" de la variable x.
- Algunas ***derivadas o diferenciales*** de la función.

$$\boxed{f(x, y, y', y'', \dots, y^n) = 0}$$

1. Orden de una ecuación diferencial

El *orden de una ecuación diferencial*, es la **derivada de mayor orden que interviene en la ecuación diferencial.**

2. Grado de una ecuación diferencial

El *grado de una ecuación diferencial*, al **grado de la derivada que interviene en la ecuación diferencial**.

II.5.1 ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL

Se denomina E*cuación diferencial lineal* a **toda ecuación de primer grado, independientemente de su orden**.

Estructura de una ecuación diferencial ordinaria lineal de primer grado y primer orden:

$$\boxed{a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x).y = g(x)}$$

Cálculo de ecuaciones diferenciales lineales

Encontrar una *solución de una ecuación diferencial* es hallar la ***estructura de la función tal que la misma satisface a dicha ecuación diferencial***. Es decir, nuestro objetivo es hallar una función y=f(x) y su estructura, tal que, si la misma es reemplazada en la ecuación, dicha ecuación se cumple o se verifica.

Solución general de una ecuación diferencial

La solución general o integral general de la ecuación diferencial, es una expresión y = f(x) *que satisface la ecuación diferencial dada y que* ***depende de tantas constantes arbitrarias como unidades tenga el orden de la ecuación diferencial.***

Solución particular de una ecuación diferencial

La *solución particular de la ecuación diferencial*, es una de las tantas soluciones particulares que se obtiene de la solución general de una ecuación diferencial, ***asignando valores determinados a cada una de las constantes que intervienen en la solución general.***

II.5.1.1 MÉTODOS DE RESOLUCIÓN

1. Método por variables separables o separación de variables

Pasos a seguir:

1. ***Despejar en el primer miembro a la función "y", y en el segundo miembro a la variable "x"***, cada una acompañada por su correspondiente diferencial.
2. ***Integrar*** ambos miembros
3. ***Despejar Y.***

2. Método general de ecuaciones diferenciales lineales

La ecuación general o forma canónica de una ecuación diferencial lineal de primer orden ***tiene la siguiente estructura:***

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + P(x).y = Q\ (x)}$$

Donde P(x) y Q(x) son funciones continuas.

Solución:

$$\boxed{y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int e^{\int P(x)dx}.Q(x)\ dx + C\right]}$$